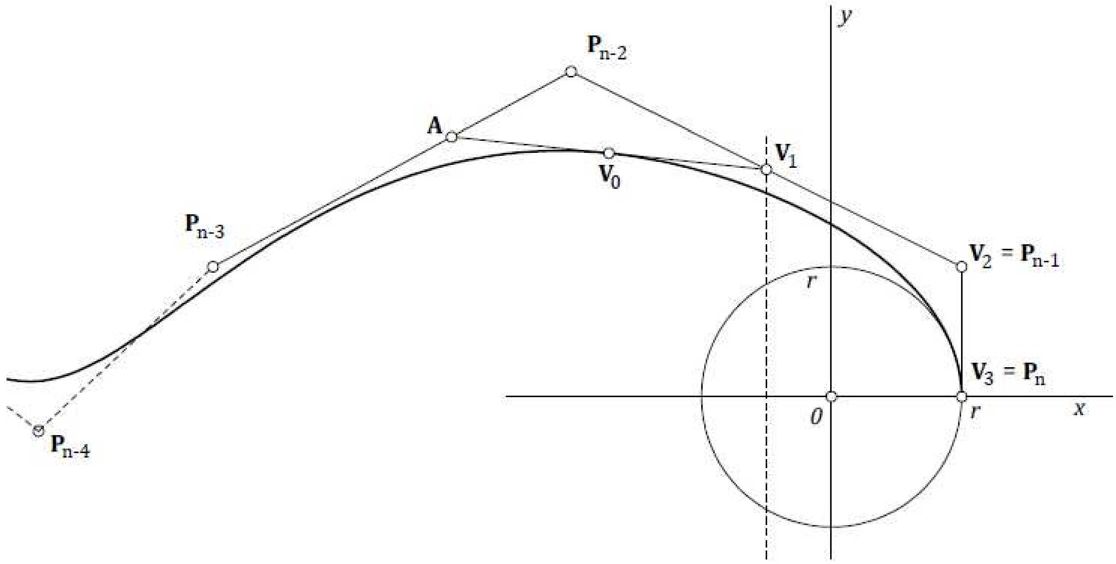
Řídicí body ukotvené křivky s předepsanou křivostí v koncovém bodě

doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D., Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, ČVUT v Praze

Uvažujeme ukotvenou uniformní B-spline křivku 3. stupně $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0,1]$, určenou řídicím polygonem $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \cdots, \mathbf{P}_n$ a poloměr r oskulační kružnice v koncovém bodě $\mathbf{P}(1)$, viz obrázek.



Poloměr oskulační kružnice je převrácená hodnota první křivosti

$$^1k(1) = \frac{|\mathbf{P}'(1) \times \mathbf{P}''(1)|}{|\mathbf{P}'(1)|^3}, \tag{1}$$

kde $|\mathbf{P}'(1) \times \mathbf{P}''(1)|$ je orientovaná velikost vektoru binormály $\mathbf{b}(t) = (b_1, b_2, b_3)$ křivky. Pro rovinnou křivku platí $\mathbf{b}(t) = (0,0,b_3)$, a tudíž $|\mathbf{P}'(1) \times \mathbf{P}''(1)| = b_3$ včetně znaménka.

Poloha řídicích bodů ukotvené křivky, které nemají vliv na hodnotu křivosti v koncovém bodě, je libovolná. Ukotvená křivka je složena z Bézierových kubik. Umístíme-li křivku do souřadnicového systému dle obrázku, mají řídicí body poslední Bézierovy kubiky následující souřadnice

$$\mathbf{V}_0 = (x_0, y_0), \mathbf{V}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{V}_2 = (r, ar), \mathbf{V}_3 = (r, 0), \tag{2}$$

kde $a > 0$ je volitelný násobek poloměru r. Na obrázku $a = 1$. Z vlastností Bézierových kubik plyne, že tečný vektor v koncovém bodě je

$$\mathbf{P}'(1) = -3\mathbf{V}_3 + 3\mathbf{V}_2 = (0, -3ar) \tag{3}$$

a vektor druhé derivace

$$\mathbf{P}'(1) = 6\mathbf{V}_1 - 12\mathbf{V}_2 + 6\mathbf{V}_3 = \big(6(x_1 - r), 6(y_1 - 2ar)\big). \tag{4}$$

První křivost dle (1) je potom

$$^1k(1) = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -3ar & 0 \\ 6(x_1 - r) & 6(y_1 - 2ar) & 0 \end{vmatrix}}{(3ar)^3} = -\frac{2(x_1 - r)}{3a^2r^2}. \tag{5}$$

Nezáleží tedy na y_1, ale pouze x_1. Bod $\mathbf{V}_1$ musí tedy ležet na rovnoběžce s vektorem $\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3$. Z rovnosti

$$-\frac{2(x_1 - r)}{3a^2r^2} = \frac{1}{r} \tag{6}$$

vyplývá vztah pro x_1

$$x_1 = \frac{1}{2}r(2 - 3a^2). \tag{7}$$

Poloha řídicích bodů ukotvené křivky je zřejmá z obrázku a z vlastností ukotvené křivky.