

**Ivana Linkeová**

## **SPECIÁLNÍ PŘÍPADY NURBS REPREZENTACE**

### **Abstrakt**

Příspěvek prezentuje B-spline křivku a Coonsovou, Bézierovu a Fergusonovu kubiku jako speciální případy NURBS reprezentace a uvádí jejich vzájemné vztahy a souvislosti.

### **Klíčová slova**

NURBS, B-spline, Coonsova kubika, Bézierova kubika, Fergusonova kubika

## **1 Úvod**

Standardním základem CAD/CAM systémů, se kterými student strojí fakulty přijde do styku již v průběhu studia i ve své odborné praxi, je v současné době NURBS reprezentace křivek a ploch. Pro efektivní využití tohoto vysoce výkonného nástroje je nutné pochopit jeho teoretický princip a rozumět zákonitostem, kterými se řídí modifikace tvaru vytvořeného modelu. Tento článek, ve kterém jsou uvedeny a na konkrétním příkladu demonstrovány vzájemné vztahy mezi NURBS, B-spline, Coonsovou, Bézierovou a Fergusonovou reprezentací, si klade za cíl objasnit souvislosti mezi modely pro mnohé uživatele CAD/CAM systémů známými (Fergusonova, Bézierova a Coonsova kubika) a těmi, které obecně nejsou pokládány za jednoduché (B-spline a NURBS křivka) [2,3].

## **2 NURBS reprezentace křivek**

Tvar NURBS křivky  $C(u)$ ,  $a \leq u \leq b$  lze modifikovat čtyřmi různými tvarovacími parametry, které je zároveň třeba zadat jako vstupní data při jejím výpočtu. Jsou to: (1) série řídicích bodů (řídicí polygon)  $\{P_i\}$ ,  $i = 0, \dots, n$  v rovině nebo v prostoru; (2) stupeň křivky  $p$ , který může být nejvýše roven  $n$ ; (3) nezáporné váhy  $\{w_i\}$ ,  $i = 0, \dots, n$  jednotlivých řídicích bodů a (4) uzly  $\{u_i\}$ ,  $i = 0, \dots, m$ , které tvoří uzlový vektor  $U$ . Uvedme nyní několik potřebných definic a vlastností NURBS reprezentace.

**Definice 1:** Necht'  $U$  je neklesající posloupnost  $(m + 1)$  reálných čísel  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_m$ . Potom čísla  $u_i$ ,  $i = 0, \dots, m$  nazýváme uzly a množinu  $U$  nazýváme uzlovým vektorem.

Je-li hodnota výrazu  $u_{i+1} - u_i$  konstantní pro všechna  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ , označujeme uzlový vektor jako *uniformní*, v ostatních případech hovoříme o *neuniformním* uzlovém vektoru.

**Definice 2:** B-spline báze funkce  $N_{i,p}(u)$ ,  $a \leq u \leq b$  stupně  $p$  jsou na uzlovém vektoru  $U = \{u_i\}$ ,  $i = 0, \dots, m$  definovány rekurzivním předpisem:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u).$$

**Definice 3:** Necht' je dáno  $(n + 1)$  řídicích bodů  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ , kde každému bodu je přiřazena nezáporná váha  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , a uzlový vektor  $U = \{u_i\}$ ,  $i = 0, \dots, m$ . Potom NURBS křivka  $\mathbf{C}(u)$ ,  $a \leq u \leq b$  stupně  $p$  je definovaná předpisem

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, \quad (2)$$

kde

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u) w_j} \quad (3)$$

jsou racionální báze funkce. Součet všech racionálních báze funkcí pro libovolnou hodnotu parametru  $u$  je roven jedné. Na každém intervalu uzlového vektoru je nejvýše  $p + 1$  racionálních báze funkcí nenulových.

Počet intervalů uzlového vektoru  $m$ , nejvyšší index série řídicích bodů  $n$  a stupeň křivky  $p$  musí splňovat rovnost:  $m = n + p + 1$ .

V závislosti na uzlovém vektoru rozlišujeme tři druhy NURBS křivek: (1) *ukotvenou (clamped)*, tj. interpolující koncové body řídicího polygonu, kdy první a poslední uzel má násobnost  $p + 1$ ; (2) *otevřenou (open)*, kde je definičním oborem pouze interval  $[u_p, u_{m-p}]$  a (3) *uzavřenou (closed)*, u které se počáteční a koncové řídicí body cyklicky opakují.

### 3 Speciální případy NURBS reprezentace křivek

Nejprve uvedeme parametrické vyjádření B-spline křivky a Coonsovy, Bézierovy a Fergusonovy kubiky vycházející z definice NURBS křivky. Vzájemné souvislosti budeme demonstrovat na příkladu s konkrétním zadáním (viz Příklad).

**Věta 1:** Necht' jsou váhy  $w_i, i = 0, \dots, n$  ve všech řídicích bodech rovny nezáporné konstantě různé od nuly. Potom B-spline křivka  $C(u) a \leq u \leq b$  stupně  $p$  má parametrické vyjádření:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, \quad (4)$$

kde  $N_{i,p}(u)$  jsou B-spline bázové funkce dle (1).

**Věta 2:** Necht' jsou dány řídicí body  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ ; váhy  $w_i, i = 0, 1, 2, 3$  rovny nezáporné konstantě různé od nuly; uniformní uzlový vektor  $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  a stupeň  $p = 3$ . Potom výsledná otevřená NURBS křivka v intervalu  $0 \leq u \leq 1$  vypočtená dle (2) je Coonsova kubika:

$$C(u) = \sum_{i=0}^3 C_i(u) \mathbf{P}_i. \quad (5)$$

kde  $C_i(u)$  jsou známé Coonsovy polynomy.

Poznámka: Konkrétní hodnoty uzlů jsou zvoleny s ohledem na Coonsovu, Bézierovu a Fergusonovu kubiku tak, aby definičním oborem výsledné otevřené NURBS křivky, a tím i zmíněných kubik, byl interval  $u \in [0, 1]$ .

**Věta 3:** Jsou-li splněny předpoklady Věty 2, je výsledná NURBS křivka v intervalu  $0 \leq u \leq 1$  vypočtená dle (2) Bézierova kubika:

$$C(u) = \sum_{i=0}^3 B_{i,n}(u) \mathbf{V}_i, \quad (6)$$

kde  $B_{i,n}(u)$  jsou Bernsteinovy polynomy třetího stupně a  $\mathbf{V}_i$  jsou vrcholy řídicího polygonu Bézierovy kubiky. Vztah mezi  $\{\mathbf{P}_i\}$  a  $\{\mathbf{V}_i\}$  je následující:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_2) - \mathbf{P}_1 \right]; & \mathbf{V}_1 &= \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1); \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{P}_1 + \frac{2}{3} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1); & \mathbf{V}_3 &= \mathbf{P}_2 + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3) - \mathbf{P}_2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

**Věta 4:** Jsou-li splněny předpoklady Věty 2, je výsledná NURBS křivka v intervalu  $0 \leq u \leq 1$  vypočtená dle (2) Fergusonova kubika:

$$C(u) = \mathbf{V}_0 F_0(u) + \mathbf{V}_3 F_1(u) + \mathbf{V}'_0 F_2(u) + \mathbf{V}'_3 F_3(u), \quad (8)$$

kde  $F_i(u)$  jsou Fergusonovy polynomy a  $\mathbf{V}_0$ , resp.  $\mathbf{V}_3$  je počáteční, resp. koncový bod Fergusonovy kubiky;  $\mathbf{V}'_0$ , resp.  $\mathbf{V}'_3$  je tečný vektor v počátečním, resp. v koncovém bodě Fergusonovy kubiky:

$$\mathbf{V}'_0 = 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0); \quad \mathbf{V}'_3 = 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2). \quad (9)$$

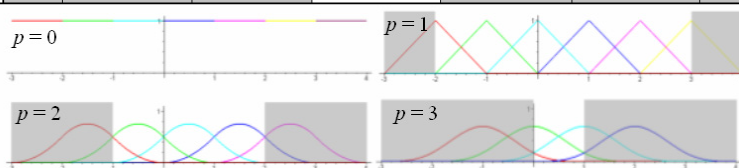
Vrcholy  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$  jsou dány vztahem (7).

## 4 Příklad

Uvažujme čtyři řídicí body  $\mathbf{P}_0 = [-3,0]$ ,  $\mathbf{P}_1 = [-3,6]$ ,  $\mathbf{P}_2 = [3,6]$ ,  $\mathbf{P}_3 = [3,0]$ ,  $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $p = 3$  a

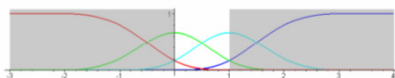
jednotkové váhy. Při výpočtu NURBS křivky (2) je třeba vypočítat B-spline  
 báze funkce (Obr. 1), a poté racionální báze funkce (Obr. 2).

$N_{i,p}$	[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4]
$N_{0,0}$	1	0	0	0	0	0	0
$N_{1,0}$	0	1	0	0	0	0	0
$N_{2,0}$	0	0	1	0	0	0	0
$N_{3,0}$	0	0	0	1	0	0	0
$N_{4,0}$	0	0	0	0	1	0	0
$N_{5,0}$	0	0	0	0	0	1	0
$N_{6,0}$	0	0	0	0	0	0	1
$N_{0,1}$	$u+3$	$-u-1$	0	0	0	0	0
$N_{1,1}$	0	$u+2$	$-u$	0	0	0	0
$N_{2,1}$	0	0	$u+1$	$-u+1$	0	0	0
$N_{3,1}$	0	0	0	$u$	$-u+2$	0	0
$N_{4,1}$	0	0	0	0	$u-1$	$-u+3$	0
$N_{5,1}$	0	0	0	0	0	$u-2$	$-u+4$
$N_{0,2}$	$\frac{1}{2}(u+3)^2$	$-u^2-3u-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}u^2$	0	0	0	0
$N_{1,2}$	0	$\frac{1}{2}(u+2)^2$	$-u^2-u+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(u-1)^2$	0	0	0
$N_{2,2}$	0	0	$\frac{1}{2}(u+1)^2$	$-u^2-u+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(u-2)^2$	0	0
$N_{3,2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}u^2$	$-u^2+3u-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}(u-3)^2$	0
$N_{4,2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}(u-1)^2$	$-u^2+5u-\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}(u-4)^2$
$N_{0,3}$	$\frac{1}{6}(u+3)^3$	$-\frac{1}{2}u^3-\frac{3}{2}u^2-\frac{3}{2}u-\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}(1-u)^3$	0	0	0
$N_{1,3}$	0	$\frac{1}{6}(u+2)^3$	$-\frac{1}{2}u^3-u^2+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}u^3-u^2+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}(2-u)^3$	0	0
$N_{2,3}$	0	0	$\frac{1}{6}(u+1)^3$	$-\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}u^3-\frac{3}{2}u^2+\frac{2}{2}u-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}(3-u)^3$	0
$N_{3,3}$	0	0	0	$\frac{1}{6}u^3$	$-\frac{1}{2}u^3+2u^2-2u+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}u^3-4u^2+10u-\frac{20}{3}$	$\frac{1}{6}(4-u)^3$



Obrázek 1: B-spline báze funkce

$R_{i,p}$	[-3, -2)	[-2, -1)	[-1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4]
$R_{0,3}$	1	$\frac{3u^3+15u^2+21u+5}{2u^3+9u^2+9u-3}$	$\frac{3u^3+3u^2-3u+1}{u^3+6}$	$\frac{1}{6}(1-u)^3$	0	0	0
$R_{1,3}$	0	$\frac{-(u+2)^3}{2u^3+9u^2+9u-3}$	$\frac{-3u^3+6u^2-4}{u^3+6}$	$\frac{1}{2}u^3-u^2+\frac{2}{3}$	$\frac{(u-2)^3}{u^3-3u^2+3u-7}$	0	0
$R_{2,3}$	0	0	$\frac{(u+1)^3}{u^3+6}$	$-\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}$	$\frac{-3u^3+15u^2-21u+5}{u^3-3u^2+3u-7}$	$\frac{-(u-3)^3}{2u^3-15u^2+33u-17}$	0
$R_{3,3}$	0	0	0	$\frac{1}{6}u^3$	$\frac{3u^3+12u^2+12u-4}{u^3-3u^2+3u-7}$	$\frac{3u^3-24u^2+60u-44}{2u^3-15u^2+33u-17}$	1



Obrázek 2: Racionální báze funkce

Povšimněme si několika významných skutečností. Vzhledem k zadanému uzlovému vektoru se jedná o segmentovanou otevřenou křivku, jejímž definičním oborem je pouze interval, na kterém je zajištěna plná podpora

SPECIÁLNÍ PŘÍPADY NURBS REPREZENTACE

bázových funkcí, tj. na kterém je právě  $p + 1$  bázových funkcí nenulových. Šedou barvou jsou v Obr. 1 a 2 vyznačeny ty intervaly uzlového vektoru, na nichž plná podpora bázových funkcí zajištěna není. Definičním oborem křivky je pouze interval  $[u_p, u_{m-p}] = [u_3, u_4] = [0, 1]$ .

Parametrické vyjádření NURBS křivky vypočtené dle (2) je následující:

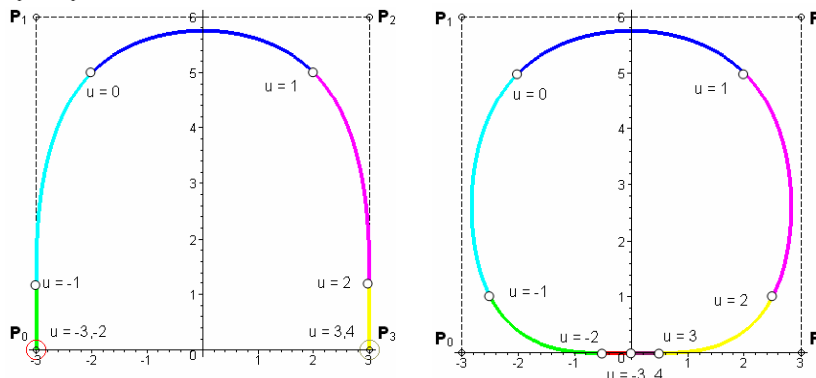
$C(u)$	$[-3, -2)$	$[-2, -1)$	$[-1, 0)$	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4]$
$x(u)$	-3	-3	$\frac{3u^3+6u^2+6u-4}{u^3+6}$	$-2u^3+3u^2+3u-2$	$\frac{3(-u^3+9u^2+21u-9)}{u^3-3u^2+3u-7}$	3	3
$y(u)$	0	$\frac{-6(u+2)^3}{2u^3+9u^2+9u-3}$	$\frac{6(-2u^3-3u^2+3u+5)}{u^3+6}$	$-3u^2+3u+5$	$\frac{6(-2u^3+9u^2-9u-3)}{u^3-3u^2+3u-7}$	$\frac{-6(u-3)^3}{2u^3-15u^2+33u-17}$	0

Na Obr. 3 je křivka nakreslena včetně okrajových částí odpovídajících intervalům  $[-3,0)$  a  $(1,4]$ , které procházejí koncovými body řídicího polygonu, protože  $R_{0,3}(-3) = R_{3,3}(4) = 1$  a  $R_{1,3}(-3) = R_{2,3}(4) = 0$ . Interpolaci koncových bodů nelze zaměňovat s vlastností ukotvené křivky, u které je tohoto jevu dosaženo  $p + 1$  násobností počátečního a koncového uzlu, viz Příklad v [1].

Parametrické vyjádření B-spline křivky vypočtené dle (4) je následující:

$C(u)$	$[-3, -2)$	$[-2, -1)$	$[-1, 0)$	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4]$
$x(u)$	$-\frac{1}{2}u+3^3$	$u^3+\frac{9}{2}u^2+\frac{9}{2}u-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}u^3+3u^2+3u-2$	$-2u^3+3u^2+3u-2$	$\frac{1}{2}u^3-\frac{9}{2}u^2+\frac{21}{2}u-\frac{9}{2}$	$u^3-\frac{15}{2}u^2+\frac{33}{2}u-\frac{17}{2}$	$\frac{1}{2}(4-u)^3$
$y(u)$	0	$(u+2)^3$	$-2u^3+3u^2+3u+5$	$-3u^2+3u+5$	$-2u^3-9u^2+9u+3$	$(3-u)^3$	0

Definičním oborem otevřené B-spline křivky (Obr. 4) je interval  $[u_p, u_{m-p}] = [0, 1]$ , ostatní části otevřené B-spline křivky jsou ignorovány.



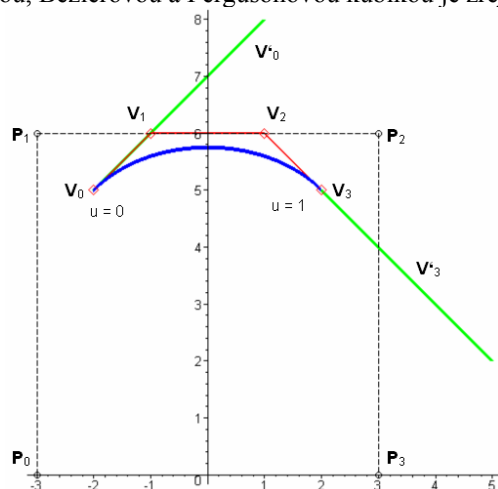
**Obrázek 3:**  
Otevřená NURBS křivka

**Obrázek 4:**  
Otevřená B-spline křivka

Je vidět, že NURBS i B-spline křivka se shodují na intervalu  $[0, 1]$ , ignorované části křivek se liší. Na rozdíl od NURBS křivky, B-spline křivka prochází bodem o souřadnicích  $[0, 0]$ , protože všechny B-spline bázové

funkce jsou pro  $u_0$  a  $u_m$  nulové. Tato skutečnost platí pro otevřenou B-spline křivku obecně, nezáleží ani na volbě řídicího polygonu, ani na volbě uzlového vektoru.

Snadno nahlédneme, že na intervalu  $u \in [0, 1]$  jsou racionální i B-spline báze funkce 3. stupně rovny Coonsovým polynomům, z čehož plyne, že úsek křivky příslušející tomuto intervalu je Coonsova kubika. Souvislost mezi Coonsovou, Bézierovou a Fergusonovou kubikou je zřejmá z Obr. 5.



Obrázek 5

Souvislost mezi Coonsovou, Bézierovou a Fergusonovou kubikou

## Poděkování

Tento článek vznikl za podpory projektu CTU 0513112: NURBS reprezentace křivek a ploch v MAPLE.

## Literatura

- [1] Kundráťová, K.: *NURBS reprezentace křivek v MAPLE*, CGG'05, Janov, 2005.
- [2] Fisher, J. – Lowther, J. – Shene, Ch. K.: *If You Know B-Splines Well, You Also Know NURBS!* SIGCSE'04, Virginia, 2004.
- [3] Lowther, J. – Shene, Ch. K.: *Teaching B-splines Is Not Difficult!* SIGCSE'03, Nevada, 2003.
- [4] Shene, Ch. K.: <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES>
- [5] Piegl, L. – Tiller, W.: *The NURBS Book*, Springer, Londýn, 1995.