

KONVEXNÍ OBAL FERGUSONOVA PLÁTU

Ivana Linkeová

FS ČVUT v Praze, Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2, ČR, e-mail: Ivana.Linkeova@fs.cvut.cz

Abstrakt. Za nevýhodu Fergusonova plátu, který patří k základním interpolačním modelům obecných tvarových ploch definovaných sítí bodů, je považována skutečnost, že není obsažen v konvexním obalu svých definičních prvků. Konverzí Fergusonova plátu na Bézierův lze za konvexní obal Fergusonova plátu považovat síť řídicích bodů Bézierova plátu. V článku jsou odvozeny potřebné převodní vztahy mezi Fergusonovým a Bézierovým plátem.

Klíčová slova: Fergusonova kubika, Fergusonovy polynomy, Fergusonův plát, Bézierova kubika, Bernsteinovy polynomy, Bézierův plát, tenzorový součin, konvexní obal

1. Vztah Bézierovy a Fergusonovy kubiky

Nejprve uvedeme základní definice a vztah mezi Bézierovou a Fergusonovou kubikou.

Definice 1 Bézierova kubika $C(u)$ je lineární kombinací Bernsteinových polynomů $B_{0,3}(u) = (1-u)^3$, $B_{1,3}(u) = 3u(1-u)^2$, $B_{2,3}(u) = 3u^2(1-u)$, $B_{3,3}(u) = u^3$

$$C(u) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(u) \mathbf{V}_i, u \in [0,1], \quad (1)$$

kde $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ jsou vrcholy řídicího polygonu.

Definice 2 Fergusonova kubika $C(u)$ je lineární kombinací Fergusonových polynomů $F_0(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$, $F_1(u) = -2u^3 + 3u^2$, $F_2(u) = u^3 - 2u^2 + u$, $F_3(u) = u^3 - u^2$

$$C(u) = F_0(u) \mathbf{Q}_0 + F_1(u) \mathbf{Q}_1 + F_2(u) \mathbf{Q}'_0 + F_3(u) \mathbf{Q}'_1, u \in [0,1], \quad (2)$$

kde $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$ jsou krajní body Fergusonovy kubiky a $\mathbf{Q}'_0, \mathbf{Q}'_1$ jsou tečné vektory v nich.

Věta 1 Fergusonova kubika je speciálním případem Bézierovy kubiky, jestliže platí

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{V}_0; \mathbf{Q}_1 = \mathbf{V}_3; \mathbf{Q}'_0 = 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0); \mathbf{Q}'_1 = 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2). \quad (3)$$

Důkaz: Do rov. (2) dosadíme definiční prvky Fergusonovy kubiky dle rov. (3) a dostaneme parametrické vyjádření Bézierovy kubiky:

$$\begin{aligned} C(u) &= F_0(u) \mathbf{V}_0 + F_1(u) \mathbf{V}_3 + 3F_2(u)(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) + 3F_3(u)(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2) = \\ &= (2u^3 - 3u^2 + 1 - 3u^3 + 6u^2 - 3u) \mathbf{V}_0 + (3u^3 - 6u^2 + 3u) \mathbf{V}_1 + \\ &\quad + (-3u^3 + 3u^2) \mathbf{V}_2 + (-2u^3 + 3u^2 + 3u^3 - 3u^2) \mathbf{V}_3 = \\ &= (1-u)^3 \mathbf{V}_0 + 3u(1-u)^2 \mathbf{V}_1 + 3u^2(1-u) \mathbf{V}_2 + u^3 \mathbf{V}_3 = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(u) \mathbf{V}_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Řešíme-li rov. (3) vzhledem k vrcholům \mathbf{V}_i , dostaneme převodní vztah mezi vrcholy řídicího polygonu Bézierovy kubiky a definičními prvky Fergusonovy kubiky:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{Q}_0; \mathbf{V}_1 = \mathbf{Q}_0 + \frac{1}{3} \mathbf{Q}'_0; \mathbf{V}_2 = \mathbf{Q}_1 - \frac{1}{3} \mathbf{Q}'_1; \mathbf{V}_3 = \mathbf{Q}_1. \quad (5)$$

Z rov. (4) vyplývá důležitý vztah mezi Bernsteinovými a Fergusonovými polynomy:

$$\begin{array}{ll} B_{0,3}(u) = F_0(u) - 3F_2(u) & F_0(u) = B_{0,3}(u) + B_{1,3}(u) \\ B_{1,3}(u) = 3F_2(u) & F_1(u) = B_{2,3}(u) + B_{3,3}(u) \\ B_{2,3}(u) = -3F_3(u) & \text{resp. } F_2(u) = \frac{1}{3}B_{1,3}(u) \\ B_{3,3}(u) = F_1(u) + 3F_3(u) & F_3(u) = -\frac{1}{3}B_{2,3}(u) \end{array} \quad (6)$$

2. Bézierův bikubický plát

Definice 3 Necht' je dána síť řídicích bodů $\{\mathbf{V}_{i,j}\}, i=0,\dots,3, j=0,\dots,3$ a vektory jednoparametrických Bernsteinových polynomů $\mathbf{B}^u = [B_{0,3}(u) \ B_{1,3}(u) \ B_{2,3}(u) \ B_{3,3}(u)]$, $\mathbf{B}^v = [B_{0,3}(v) \ B_{1,3}(v) \ B_{2,3}(v) \ B_{3,3}(v)]^T$. Potom je Bézierův bikubický plát (dále jen Bézierův plát) $\mathbf{S}(u,v)$ dán lineární kombinací dvouparametrických bázových funkcí $\{B_{i,j}(u,v)\}, i=0,\dots,3, j=0,\dots,3$

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{i,j}(u,v) \mathbf{V}_{i,j}, \quad u \in [0,1], v \in [0,1], \quad (7)$$

kde dvouparametrické bázové funkce $B_{i,j}(u,v)$ jsou prvky matice \mathbf{B} , která je tenzorovým součinem (značeno symbolem $*$) vektorů \mathbf{B}^u a \mathbf{B}^v :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^u * \mathbf{B}^v = \begin{bmatrix} B_{0,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{0,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{0,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{0,3}(u)B_{3,3}(v) \\ B_{1,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{1,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{1,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{1,3}(u)B_{3,3}(v) \\ B_{2,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{2,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{2,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{2,3}(u)B_{3,3}(v) \\ B_{3,3}(u)B_{0,3}(v) & B_{3,3}(u)B_{1,3}(v) & B_{3,3}(u)B_{2,3}(v) & B_{3,3}(u)B_{3,3}(v) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

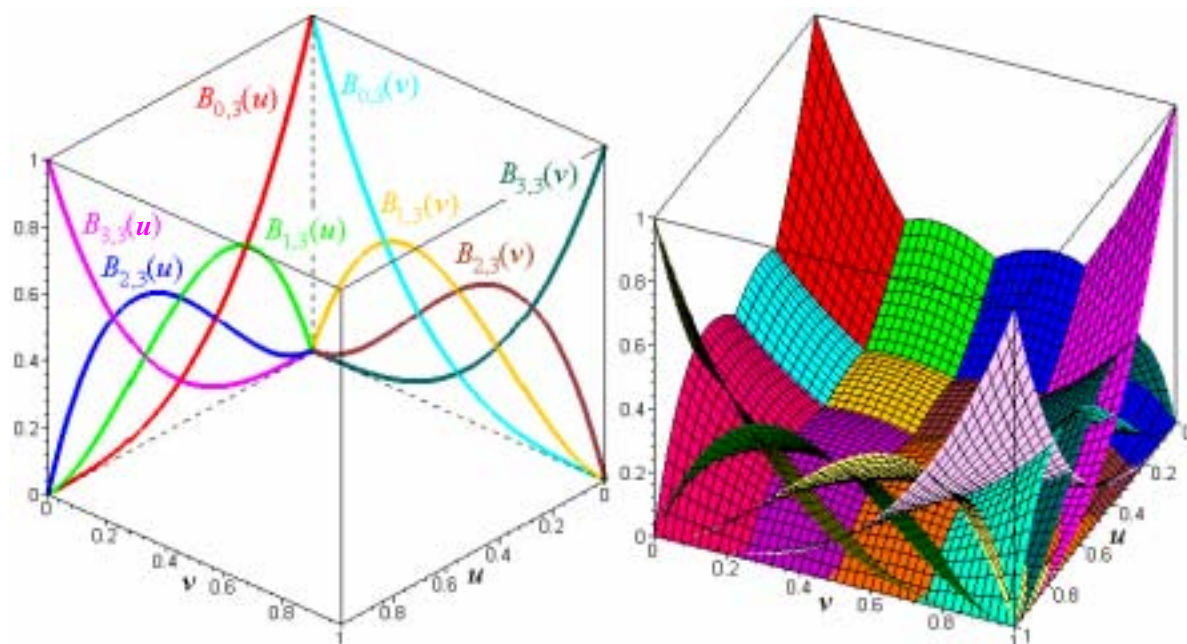
Z nejvýznamnějších vlastností Bézierova plátu, uvedeme dvě:

- Okrajové křivky definované okrajovými řídicími polygony jsou Bézierovy kubiky.
- Bézierův plát splňuje podmínku konvexního obalu, tj. pro $u \in [0,1]$ a $v \in [0,1]$ leží bod plochy $\mathbf{S}(u,v)$ dle rov. (7) v nejmenší konvexní množině obsahující řídicí body sítě $\{\mathbf{V}_{i,j}\}, i=0,\dots,3, j=0,\dots,3$.

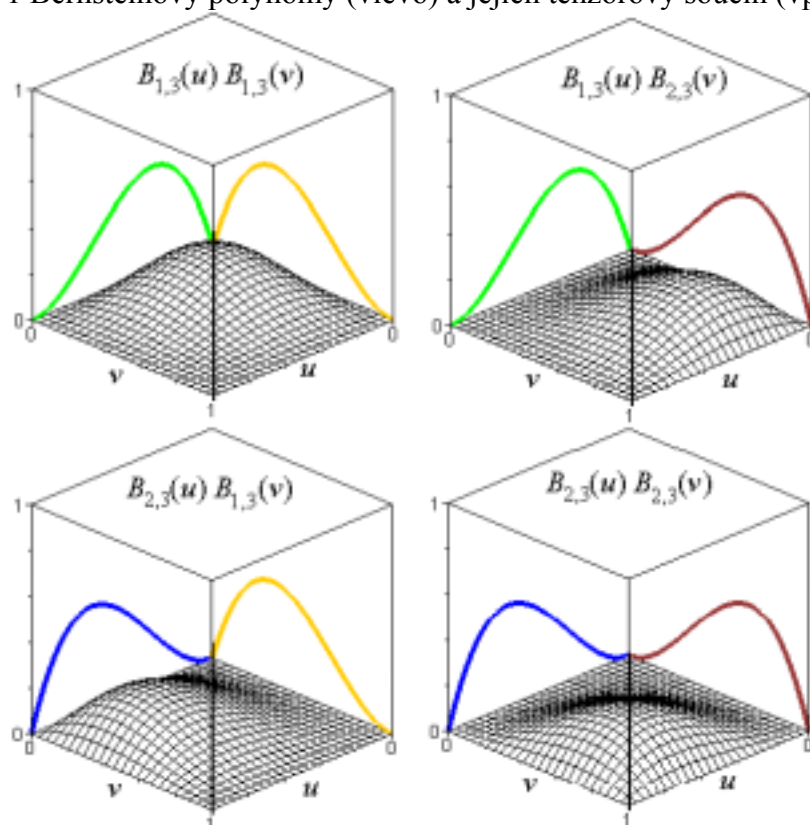
Grafická podoba tenzorového součinu je znázorněna na obr. 1. Vlevo jsou zobrazeny jednoparametrické Bernsteinovy polynomy, vpravo výsledný systém dvouparametrických bázových funkcí.

Z průběhu dvouparametrických bázových funkcí je zřejmé, že Bézierův plát interpoluje pouze rohy sítě, neboť pouze zde (ve smyslu hodnot parametrů u a v) dosahují bázové funkce hodnoty 1. Ostatními řídicími body Bézierův plát neprochází, neboť žádná z bázových funkcí, které jsou k nim přidruženy, nedosahuje hodnoty 1.

Velmi zajímavé jsou bázové funkce vnitřních řídicích bodů $\mathbf{V}_{1,1}, \mathbf{V}_{1,2}, \mathbf{V}_{2,1}, \mathbf{V}_{2,2}$, jejichž grafy jsou samostatně rozkresleny na obr. 2. Důležitá je skutečnost, že všechny tyto funkce jsou na okrajích i v rozích intervalů parametrů u a v nulové. Znamená to, že poloha vnitřních řídicích bodů nemá vliv na tvar okrajových křivek Bézierova plátu.



Obr. 1 Bernsteinovy polynomy (vlevo) a jejich tenzorový součin (vpravo)



Obr. 2 Bázové funkce vnitřních řídicích bodů Béziera plátu

3. Fergusonův 12-ti vektorový plát

Definice 4 Necht' jsou dány čtyři definiční body $\mathbf{Q}_{0,0}, \mathbf{Q}_{0,1}, \mathbf{Q}_{1,0}, \mathbf{Q}_{1,1}$ a v každém z těchto bodů tečný vektor $\mathbf{Q}_{0,0}^u, \mathbf{Q}_{0,1}^u, \mathbf{Q}_{1,0}^u, \mathbf{Q}_{1,1}^u$ ve směru u a tečný vektor $\mathbf{Q}_{0,0}^v, \mathbf{Q}_{0,1}^v, \mathbf{Q}_{1,0}^v, \mathbf{Q}_{1,1}^v$ ve směru v . Dále necht' vektory \mathbf{F}^u , resp. \mathbf{F}^v jsou vektory jednoparametrických Fergusonových polynomů

$$\mathbf{F}^u = [F_0(u) \ F_2(u) \ F_3(u) \ F_1(u)], \text{ resp. } \mathbf{F}^v = [F_0(v) \ F_2(v) \ F_3(v) \ F_1(v)]^T.$$

Potom je Fergusonův 12-ti vektorový plát (dále jen Fergusonův plát) $\mathbf{S}(u,v)$ dán lineární kombinací dvouparametrických bázových funkcí $\{F_{i,j}(u,v)\}, i = 0, \dots, 3, j = 0, \dots, 3$

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n F_{i,j}(u,v) \mathbf{M}_{i,j}^F, u \in [0,1], v \in [0,1], \quad (9)$$

kde dvouparametrické bázové funkce $F_{i,j}(u,v)$ jsou prvky matice \mathbf{F} , která je tenzorovým součinem vektorů \mathbf{F}^u a \mathbf{F}^v :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^u * \mathbf{F}^v = \begin{bmatrix} F_0(u)F_0(v) & F_0(u)F_2(v) & F_0(u)F_3(v) & F_0(u)F_1(v) \\ F_2(u)F_0(v) & F_2(u)F_2(v) & F_2(u)F_3(v) & F_2(u)F_1(v) \\ F_3(u)F_0(v) & F_3(u)F_2(v) & F_3(u)F_3(v) & F_3(u)F_1(v) \\ F_1(u)F_0(v) & F_1(u)F_2(v) & F_1(u)F_3(v) & F_1(u)F_1(v) \end{bmatrix} \quad (10)$$

a $\mathbf{M}_{i,j}^F$ jsou prvky matice \mathbf{M}^F , tzv. mapy Fergusonova plátu

$$\mathbf{M}^F = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{0,0} & \mathbf{Q}_{0,0}^v & \mathbf{Q}_{0,1}^v & \mathbf{Q}_{0,1} \\ \mathbf{Q}_{0,0}^u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{0,1}^u \\ \mathbf{Q}_{1,0}^u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{1,1}^u \\ \mathbf{Q}_{1,0} & \mathbf{Q}_{1,0}^v & \mathbf{Q}_{1,1}^v & \mathbf{Q}_{1,1} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Okrajové křivky Fergusonova plátu jsou Fergusonovy kubiky. Mezi hlavní nevýhody Fergusonova plátu patří skutečnost, že nelze z definičních prvků vytvořit konvexní obal, ve kterém by byl Fergusonův plát obsažen.

4. Vztah Bézierova a Fergusonova plátu

Z definice a vlastností Fergusonova plátu vyplývá, že čtyři Fergusonovy kubiky, které se dotýkají svými krajními body jednoznačně určují Fergusonův plát. Vzhledem k tomu, že Fergusonova kubika je speciálním případem Bézierovy kubiky, lze říci, že Fergusonův plát je také jednoznačně určen čtyřmi okrajovými Bézierovými kubikami. Víme dále, že okrajové křivky Bézierova plátu jsou Bézierovy kubiky a že poloha vnitřních řídicích bodů nemá na tvar okrajových křivek žádný vliv. Naskytá se tedy otázka, zda Fergusonův plát není speciálním případem Bézierova plátu. Následující věta říká, že tomu tak je.

Věta 2 Necht' je dána mapa \mathbf{M}^F Fergusonova plátu, resp. mapa \mathbf{M}^B Bézierova plátu

$$\mathbf{M}^F = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{0,0} & \mathbf{Q}_{0,0}^v & \mathbf{Q}_{0,1}^v & \mathbf{Q}_{0,1} \\ \mathbf{Q}_{0,0}^u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{0,1}^u \\ \mathbf{Q}_{1,0}^u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{1,1}^u \\ \mathbf{Q}_{1,0} & \mathbf{Q}_{1,0}^v & \mathbf{Q}_{1,1}^v & \mathbf{Q}_{1,1} \end{bmatrix}, \text{ resp. } \mathbf{M}^B = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} & \mathbf{V}_{0,3} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} & \mathbf{V}_{1,3} \\ \mathbf{V}_{2,0} & \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} & \mathbf{V}_{2,3} \\ \mathbf{V}_{3,0} & \mathbf{V}_{3,1} & \mathbf{V}_{3,2} & \mathbf{V}_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Potom je Fergusonův plát speciálním případem Bézierova plátu, právě když platí

$$\mathbf{M}^B = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{0,0} & \mathbf{Q}_{0,0} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,0}^v & \mathbf{Q}_{0,1} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,1}^v & \mathbf{Q}_{0,1} \\ \mathbf{Q}_{0,0} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,0}^u & \mathbf{Q}_{0,0} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,0}^u + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,0}^v & \mathbf{Q}_{0,1} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,1}^u - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,1}^v & \mathbf{Q}_{0,1} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,1}^u \\ \mathbf{Q}_{1,0} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,0}^u & \mathbf{Q}_{0,0} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,0}^u + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,0}^v & \mathbf{Q}_{1,1} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,1}^u - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,1}^v & \mathbf{Q}_{1,1} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,1}^u \\ \mathbf{Q}_{1,0} & \mathbf{Q}_{1,0} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,0}^v & \mathbf{Q}_{1,1} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,1}^v & \mathbf{Q}_{1,1} \end{bmatrix},$$

resp.

$$\mathbf{M}^F = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & 3(\mathbf{V}_{0,1} - \mathbf{V}_{0,0}) & 3(\mathbf{V}_{0,3} - \mathbf{V}_{0,2}) & \mathbf{V}_{0,3} \\ 3(\mathbf{V}_{0,1} - \mathbf{V}_{0,0}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3(\mathbf{V}_{1,3} - \mathbf{V}_{0,3}) \\ 3(\mathbf{V}_{3,0} - \mathbf{V}_{2,0}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3(\mathbf{V}_{3,3} - \mathbf{V}_{2,3}) \\ \mathbf{V}_{3,0} & 3(\mathbf{V}_{3,1} - \mathbf{V}_{3,0}) & 3(\mathbf{V}_{3,3} - \mathbf{V}_{3,2}) & \mathbf{V}_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Důkaz: Označme $\mathbf{S}^B(u, v)$ Bézierův plát dle rov. (7) a $\mathbf{S}^F(u, v)$ Fergusonův plát dle rov. (9). Pokud je Fergusonův plát speciálním případem Bézierova plátu, musí platit

$$\mathbf{S}^F(u, v) = \mathbf{S}^B(u, v). \quad (12)$$

Označme $\mathbf{S}_I^F, \mathbf{S}_{II}^F, \mathbf{S}_{III}^F, \mathbf{S}_{IV}^F$ lineární subkombinace Fergusonova plátu

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_I^F &= F_0(u)F_0(v)\mathbf{Q}_{0,0} + F_0(u)F_2(v)\mathbf{Q}_{0,0}^v + F_2(u)F_0(v)\mathbf{Q}_{0,0}^u \\ \mathbf{S}_{II}^F &= F_0(u)F_3(v)\mathbf{Q}_{0,1}^v + F_0(u)F_1(v)\mathbf{Q}_{0,1} + F_2(u)F_1(v)\mathbf{Q}_{0,1}^u \\ \mathbf{S}_{III}^F &= F_3(u)F_0(v)\mathbf{Q}_{1,0}^u + F_1(u)F_0(v)\mathbf{Q}_{1,0} + F_1(u)F_2(v)\mathbf{Q}_{1,0}^v \\ \mathbf{S}_{IV}^F &= F_3(u)F_1(v)\mathbf{Q}_{1,1}^u + F_1(u)F_3(v)\mathbf{Q}_{1,1}^v + F_1(u)F_1(v)\mathbf{Q}_{1,1} \end{aligned} \quad (13)$$

a $\mathbf{S}_I^B, \mathbf{S}_{II}^B, \mathbf{S}_{III}^B, \mathbf{S}_{IV}^B$ lineární subkombinace Bézierova plátu

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_I^B &= B_{0,3}(u)B_{0,3}(v)\mathbf{V}_{0,0} + B_{0,3}(u)B_{1,3}(v)\mathbf{V}_{0,1} + B_{1,3}(u)B_{0,3}(v)\mathbf{V}_{1,0} + B_{1,3}(u)B_{1,3}(v)\mathbf{V}_{1,1} \\ \mathbf{S}_{II}^B &= B_{0,3}(u)B_{2,3}(v)\mathbf{V}_{0,2} + B_{0,3}(u)B_{3,3}(v)\mathbf{V}_{0,3} + B_{1,3}(u)B_{2,3}(v)\mathbf{V}_{1,2} + B_{1,3}(u)B_{3,3}(v)\mathbf{V}_{1,3} \\ \mathbf{S}_{III}^B &= B_{2,3}(u)B_{0,3}(v)\mathbf{V}_{2,0} + B_{2,3}(u)B_{1,3}(v)\mathbf{V}_{2,1} + B_{3,3}(u)B_{0,3}(v)\mathbf{V}_{3,0} + B_{3,3}(u)B_{1,3}(v)\mathbf{V}_{3,1} \\ \mathbf{S}_{IV}^B &= B_{2,3}(u)B_{2,3}(v)\mathbf{V}_{2,2} + B_{2,3}(u)B_{3,3}(v)\mathbf{V}_{2,3} + B_{3,3}(u)B_{2,3}(v)\mathbf{V}_{3,2} + B_{3,3}(u)B_{3,3}(v)\mathbf{V}_{3,3} \end{aligned} \quad (14)$$

Podmínku (12) lze vyjádřit také jako rovnost příslušných lineárních subkombinací:

$$\mathbf{S}_I^F = \mathbf{S}_I^B, \mathbf{S}_{II}^F = \mathbf{S}_{II}^B, \mathbf{S}_{III}^F = \mathbf{S}_{III}^B, \mathbf{S}_{IV}^F = \mathbf{S}_{IV}^B. \quad (15)$$

Vyjádříme-li Fergusonovy polynomy v (13) pomocí převodních vztahů (6) jako Bernsteinovy polynomy, obdržíme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_I^F &= [B_{0,3}(u) + B_{1,3}(u)][B_{0,3}(v) + B_{1,3}(v)]\mathbf{Q}_{0,0} + [B_{0,3}(u) + B_{1,3}(u)]\frac{1}{3}B_{1,3}(v)\mathbf{Q}_{0,0}^v + \\
 &\quad + \frac{1}{3}B_{1,3}(u)[B_{0,3}(v) + B_{1,3}(v)]\mathbf{Q}_{0,0}^u \\
 \mathbf{S}_{II}^F &= [B_{0,3}(u) + B_{1,3}(u)][-\frac{1}{3}B_{2,3}(v)]\mathbf{Q}_{0,1}^v + [B_{0,3}(u) + B_{1,3}(u)][B_{2,3}(v) + B_{3,3}(v)]\mathbf{Q}_{0,1} + \\
 &\quad + \frac{1}{3}B_{1,3}(u)[B_{2,3}(v) + B_{3,3}(v)]\mathbf{Q}_{0,1}^u \\
 \mathbf{S}_{III}^F &= -\frac{1}{3}B_{2,3}(u)[B_{0,3}(v) + B_{1,3}(v)]\mathbf{Q}_{1,0}^u + [B_{2,3}(u) + B_{3,3}(u)][B_{0,3}(v) + B_{1,3}(v)]\mathbf{Q}_{1,0} + \\
 &\quad + [B_{2,3}(u) + B_{3,3}(u)]\frac{1}{3}B_{1,3}(v)\mathbf{Q}_{1,0}^v \\
 \mathbf{S}_{IV}^F &= -\frac{1}{3}B_{2,3}(u)[B_{2,3}(v) + B_{3,3}(v)]\mathbf{Q}_{1,1}^u + [B_{2,3}(u) + B_{3,3}(u)][-\frac{1}{3}B_{2,3}(v)]\mathbf{Q}_{1,1}^v + \\
 &\quad + [B_{2,3}(u) + B_{3,3}(u)][B_{2,3}(v) + B_{3,3}(v)]\mathbf{Q}_{1,1}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Po úpravě (16) můžeme porovnat koeficienty u stejných dvouparametrických bázových funkcí mezi (14) a (16) a obdržíme převodní vztahy mezi sítí řídicích bodů Béziera plátu a definičními prvky Fergusonova plátu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{0,0} &= \mathbf{Q}_{0,0} & \mathbf{V}_{1,0} &= \mathbf{Q}_{0,0} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,0}^u & \mathbf{V}_{0,1} &= \mathbf{Q}_{0,0} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,0}^v & \mathbf{V}_{1,1} &= \mathbf{Q}_{0,0} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,0}^u + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,0}^v \\
 \mathbf{V}_{0,3} &= \mathbf{Q}_{0,1} & \mathbf{V}_{1,3} &= \mathbf{Q}_{0,1} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,1}^u & \mathbf{V}_{0,2} &= \mathbf{Q}_{0,1} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,1}^v & \mathbf{V}_{1,2} &= \mathbf{Q}_{0,1} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,1}^u - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{0,1}^v \\
 \mathbf{V}_{3,0} &= \mathbf{Q}_{1,0} & \mathbf{V}_{2,0} &= \mathbf{Q}_{1,0} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,0}^u & \mathbf{V}_{3,1} &= \mathbf{Q}_{1,0} + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,0}^v & \mathbf{V}_{2,1} &= \mathbf{Q}_{1,0} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,0}^u + \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,0}^v \\
 \mathbf{V}_{3,3} &= \mathbf{Q}_{1,1} & \mathbf{V}_{2,3} &= \mathbf{Q}_{1,1} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,1}^u & \mathbf{V}_{3,2} &= \mathbf{Q}_{1,1} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,1}^v & \mathbf{V}_{2,2} &= \mathbf{Q}_{1,1} - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,1}^u - \frac{1}{3}\mathbf{Q}_{1,1}^v
 \end{aligned} \tag{17}$$

nebo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{0,0} &= \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{Q}_{0,0}^u &= 3(\mathbf{V}_{1,0} - \mathbf{V}_{0,0}) & \mathbf{Q}_{0,0}^v &= 3(\mathbf{V}_{0,1} - \mathbf{V}_{0,0}) \\
 \mathbf{Q}_{0,1} &= \mathbf{V}_{0,3} & \mathbf{Q}_{0,1}^u &= 3(\mathbf{V}_{1,3} - \mathbf{V}_{0,3}) & \mathbf{Q}_{0,1}^v &= 3(\mathbf{V}_{0,2} - \mathbf{V}_{0,3}) \\
 \mathbf{Q}_{1,0} &= \mathbf{V}_{3,0} & \mathbf{Q}_{1,0}^u &= 3(\mathbf{V}_{2,0} - \mathbf{V}_{3,0}) & \mathbf{Q}_{1,0}^v &= 3(\mathbf{V}_{3,1} - \mathbf{V}_{3,0}) \\
 \mathbf{Q}_{1,1} &= \mathbf{V}_{3,3} & \mathbf{Q}_{1,1}^u &= 3(\mathbf{V}_{2,3} - \mathbf{V}_{3,3}) & \mathbf{Q}_{1,1}^v &= 3(\mathbf{V}_{3,2} - \mathbf{V}_{3,3})
 \end{aligned}$$

Řídicí body Béziera plátu v (17) představují konvexní obal Fergusonova plátu.

5. Závěr

V příspěvku je odvozen převodní vztah mezi sítí řídicích bodů Béziera bikubického plátu a definičními prvky Fergusonova 12-ti vektorového plátu. Tyto převodní vztahy mohou být využity ke konstrukci konvexního obalu Fergusonova plátu.

Literatura

- [1] PIEGL, L. , TILLER, W.: *The NURBS Book*. Londýn. Springer. 1995.
- [2] SHENE, Ch. K.: <http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES>
- [3] JEŽEK, F: *Geometrické a počítačové modelování*. Pomocný učební text. Plzeň. Katedra matematiky, FAV-Západočeská univerzita v Plzni. 2000.

Summary

In the article, the interrelationship between Ferguson 12-vector patch and Bézier bicubic patch is presented. Ferguson patch belongs to basic interpolation models of free form surfaces given by spatial net of point. The no-existence of convex hull property of Ferguson patch can be considered as a disadvantage of this model. After conversion of the Ferguson patch to the Bézier one, the convex hull can be given by spatial net of Bézier control points. The needed conversion relations are derived.