

Singularita rotačních obalových ploch

Ivana Linkeová

ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav technické matematiky

Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2 – Nové Město

Ivana.Linkeova@fs.cvut.cz

Abstrakt. V příspěvku je diskutován vznik singularit na rotačních obalových plochách a uvedena konstrukční metoda nalezení bodů charakteristiky obalové plochy, které singularitu způsobují. Za tvořící plochu je uvažována rotační plocha, která vznikne rotací rovinné křivky obecného tvaru kolem osy rotace mimoběžné s osou rotace obalové plochy. K vizualizaci problému jsou použity prostorové modely úloh vytvořené v 3D modeláři Rhinoceros – NURBS modelling for Windows (Rhino). Vzhledem k tomu, že běžně užívané 3D modeláře nedisponují možnostmi pro počítačem podporované konstrukce obalových ploch, je v příspěvku uveden i postup, kterým lze vymodelovat charakteristiku rotační obalové plochy a následně použít k vytvoření 3D modelu obalové plochy.

Klíčová slova: Obalová plocha, rotační obalová plocha, tvořící plocha, charakteristika, modelování obalových ploch, Rhinoceros.

1 Úvod

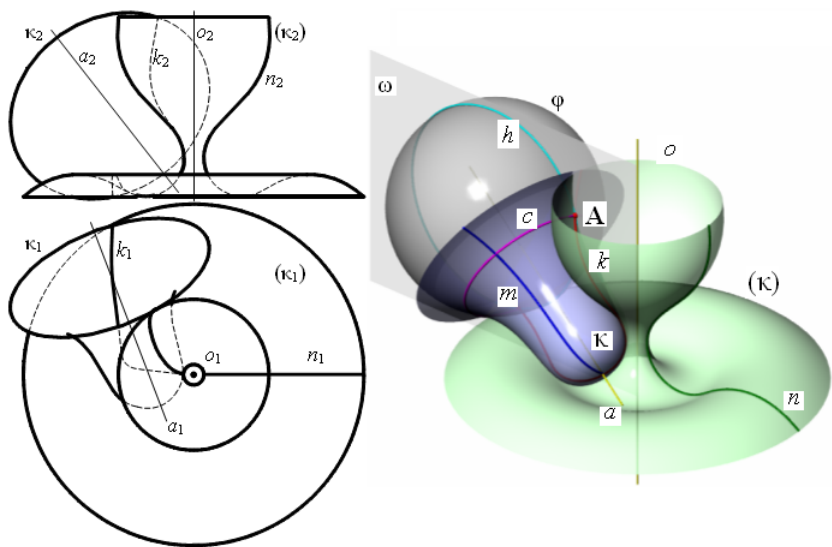
Spojitým rotačním pohybem tvořící plochy κ kolem osy rotace o vznikne jednoparametrický systém ploch $\kappa(t)$, jejichž obálku (pokud existuje) nazýváme obalovou plochou (κ). Obalová plocha (κ) se každé plochy $\kappa(t)$ dotýká podél křivky k , kterou nazýváme charakteristikou obalové plochy, viz obr. 1 (vlevo řešení v Mongeově promítání, vpravo 3D model). Osa rotace o je zvolena svislá.

V každém bodě \mathbf{A} charakteristiky k mají tvořící plocha κ a obalová plocha (κ) společnou tečnou rovinu τ . Podrobně-li charakteristiku k stejnému pohybu jako tvořící plochu κ , vznikne tatáž plocha (κ).

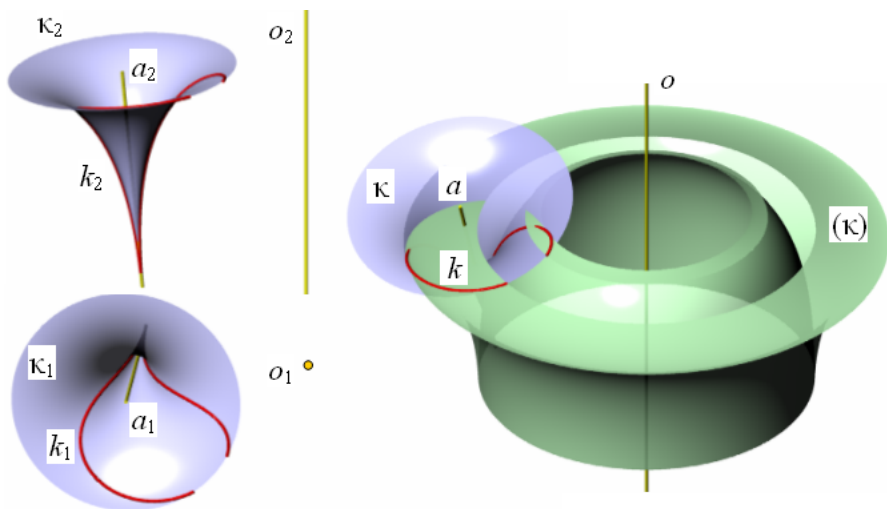
Při konstrukci bodu \mathbf{A} charakteristiky k uvažujeme množinu kulových ploch vepsaných do tvořící plochy κ . Tyto kulové plochy se dotýkají dané tvořící plochy κ podél rovnoběžkové kružnice. Označme φ jednu z těchto kulových ploch a její dotykovou rovnoběžkovou kružnici c . Charakteristika rotační obalové plochy vytvořené kulovou plochou φ je hlavní kružnice h , která leží v rovině ω kolmé na tečnu trajektorie středu kulové plochy φ . Bod \mathbf{A} charakteristiky je průsečíkem (pokud existuje) kružnice c a charakteristiky h .

2 Regulární a singulární část obalové plochy

Na obr. 2 jsou vlevo zobrazeny sdružené průměty zadání ukázkové úlohy, na které budeme demonstrovat vznik a řešení singularity rotační obalové plochy.



Obr. 1: Obalová plocha vzniklá rotací rotační plochy



Obr. 2: Obalová plocha částečně obaluje a částečně protíná tvořící plochu

Vpravo je zobrazen výsledek, kdy obalová plocha obsahuje dvě části: regulární, ve které obaluje tvořící plochu (tj. dotýká se jí podél charakteristiky), a singulární, ve které obalová plocha tvořící plochu neobaluje, ale protíná. Úkolem je identifikovat ty body charakteristiky, které generují singulární část obalové plochy.

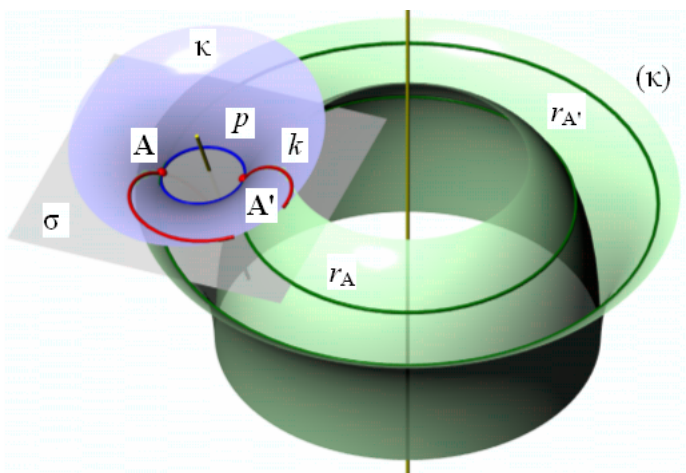
2.1 Kritérium

Konstrukce bodu charakteristiky obalové plochy pomocí vepsaných kulových ploch uvedená výše je konstrukce lokální a úkol rozlišit body charakteristiky na body, které generují regulární nebo singulární části obalové plochy, tudíž neřeší.

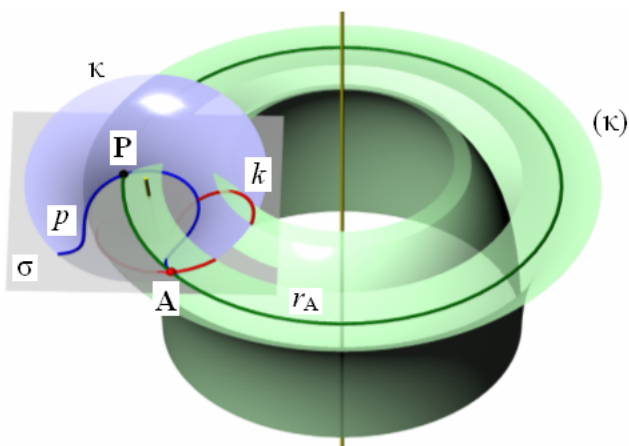
Pro nalezení potřebného kritéria budeme uvažovat následovně:

1. Nejprve si uvědomíme, že trajektorií každého bodu \mathbf{A} charakteristiky k obalové plochy (κ) je rovnoběžková kružnice $r_{\mathbf{A}}$, která leží v rovině σ kolmé k ose rotace o , viz obr. 3. Na obr. 3 protíná rovina σ obalovou plochu (κ) ve dvou rovnoběžkových kružnicích $r_{\mathbf{A}}$ a $r_{\mathbf{A}'}$. Rovnoběžková kružnice $r_{\mathbf{A}'}$ je trajektorií bodu \mathbf{A}' , jehož z -ová souřadnice je stejná jako z -ová souřadnice bodu \mathbf{A} .
2. Dále sestrojíme křivku p , která je průnikovou křivkou tvořící plochy κ a roviny σ .
3. Jestliže má bod \mathbf{A} charakteristiky k generovat regulární část obalové plochy (κ), musí se jeho rovnoběžková kružnice $r_{\mathbf{A}}$ dotýkat průnikové křivky p pouze v jediném bodě, a to v bodě \mathbf{A} . Tuto podmínku splňují na obr. 3 oba body \mathbf{A} i \mathbf{A}' .
4. Pokud ale existuje kromě bodu dotyku \mathbf{A} ještě průsečík \mathbf{P} rovnoběžkové kružnice $r_{\mathbf{A}}$ a průnikové křivky p , bod \mathbf{A} generuje singulární část obalové plochy. Rovnoběžková kružnice $r_{\mathbf{A}}$ se sice v bodě \mathbf{A} dotýká tvořící plochy, ale na jiném místě (v bodě \mathbf{B}) tvořící plochu protíná.
5. Dělicí bod charakteristiky, tj. bod, ve kterém se charakteristika dělí na část charakteristiky generující regulární část obalové plochy a na část charakteristiky generující singulární část obalové plochy, je bod, ve kterém bod dotyku i bod průniku splývají, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Tím jsme získali kritérium, podle kterého můžeme body charakteristiky zkonstruované metodou vepsaných kulových ploch testovat a charakteristiku rozdělit na část, která generuje regulární část obalové plochy a na část, která generuje singulární část obalové plochy. Za konečný tvar obalové plochy považujeme pouze její regulární část, jak je uvedeno např. na obr. 3.



Obr. 3: Body A , A' generují regulární část obalové plochy



Obr. 4: Bod A generuje singulární část obalové plochy

3 Vizualizace obalových ploch

Obalové plochy mají přímou technickou aplikaci ve strojírenství – v obrábění se teorie obalových ploch využívá při konstrukci a výrobě řezných nástrojů. Z těchto důvodů jsou obalové plochy považovány za jedno ze stěžejních témat vyučovaných v rámci předmětu Konstruktivní geometrie na Strojní fakultě ČVUT v Praze. Z důvodů značných nároků na prostorovou

představivost je toto téma pokládáno zároveň i za jedno z nejobtížnějších. 3D modely obalových ploch názorným způsobem doplňují klasickou konstrukci v Mongeově promítání a zvyšují didaktickou úroveň výuky.

Počítačem podporované konstruování a modelování obalových ploch není v současných 3D modelářích dostatečně zastoupeno. Pro zadanou tvořící plochu a její trajektorii neexistují příkazy a nástroje pro konstrukci charakteristiky obalové plochy.

Bodová konstrukce charakteristiky metodou vepsaných kulových ploch není pro počítačovou aplikaci vhodná. Jednak je zdlouhavá a přesnost získané charakteristiky jako křivky proložené zkonstruovanými body by byla velmi citlivá na počet zkonstruovaných bodů a typ proložené křivky.

K určení tvaru charakteristiky v modelech uvedených v tomto článku byla využita skutečnost, že charakteristika je průniková křivka dvou nekočně blízkých poloh tvořící plochy. V případě rotačních obalových ploch je třeba kvůli konečné přesnosti programu Rhino vymodelovat dvě polohy tvořící plochy vzájemně pootočené o nepatrný úhel, jehož konkrétní velikost záleží na skutečných rozměrech modelu a vzdálenosti tvořící plochy od osy rotace o (např. v ukázkové úloze uvedené na obrázcích tohoto článku byl použit úhel 0.1° , největší průměr rovnoběžkové kružnice obalové plochy byl přibližně 300 mm). Přesnost takto získané charakteristiky byla ověřena konstrukcí pomocí vepsaných kulových ploch a bylo zjištěno, že je srovnatelná s tolerancí přesnosti předem nastavenou v programu Rhino.

Jakmile získáme charakteristiku, podrobíme ji stejnému pohybu jako tvořící plochu, tj. standardními nástroji modeláře vymodelujeme rotační plochu, která je výslednou obalovou plochou.

Popsaným způsobem lze postupovat v libovolném 3D modeláři, neboť příkazy pro otáčení objektů s kopírováním, nalezení průnikové křivky dvou objektů a vytvoření rotační plochy při dané tvořící křivce a ose rotace patří k jejich běžným výbavám.

3.1 Galerie rotačních obalových ploch

Modelování obalových ploch bylo tématem zápočtových prací (letní semestr 2006-2007) volitelného předmětu Geometrie pro CAD, který je zaměřen na modelování v Rhinu a na teoretický základ NURBS reprezentace. Modely rotačních obalových ploch, které studenti vytvořili, jsou uvedeny v galerii na

<http://marian.fsik.cvut.cz/~linkeova>

pod heslem Geometrie pro CAD → Ukázky studentských zápočtových prací. Modely této galerie budou sloužit jako vhodná didaktická pomůcka při výuce Konstruktivní geometrie v dalších letech.

4 Závěr

Další práce bude zaměřena na nalezení podmínek, za kterých singulární části obalové plochy vznikají a na doplnění konstrukční metody identifikace bodů charakteristiky generujících singulární část numerickým řešením celého problému.

Literatura

- [1] I. Linkeová: *Geometric Modelling in Education Process*, In: International Conference on Engineering Education, Silesian University of Technology, Gliwice, Poland, 2005
- [2] D. Szarková: *Rotačná plocha vytvorená rotačnou plochou*, In: Sborník 17. semináře odborné skupiny pro geometrii a počítačovou grafiku, Vydavatelství Západočeskej univerzity, Plzeň 1997, str.89-93
- [3] D. Szarková: *Počítačové spracovanie obalovej plochy vytvorenej skrutkovým pohybom rotačnej plochy*, In: Zborník referátov z medzinárodnej konferencie Strojné inžinierstvo '99, SjF STU, Vydavateľstvo STU v Bratislave, 1999, str.83-86
- [4] D.: Velichová: *Konstruktivná geometria*, SjF STU, Vydavateľstvo STU v Bratislave, 1996
- [5] Studenti předmětu Geometrie pro CAD 2006-2007, FS ČVUT v Praze: *Galerie obalových ploch*, <http://marian.fsik.cvut.cz/~linkeova>